SESSION DE 1988

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

ANALYSE NUMÉRIQUE

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENT : 4

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Notations et objectif du problème

Dans tout le problème E est un espace vectoriel euclidien sur R de dimension n où $n \geqslant 1$; $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E; on note $< , >$ le produit scalaire sur E et $\| \ \|$ la norme sur E. Le but du problème est de mettre en place un algorithme de résolution d'un système linéaire $f(x) = b$ où f est un automorphisme de E.

Pour tout sous-espace H de dimension $n - 1$ de E (hyperplan de E), on note s_H la symétrie orthogonale par rapport à H. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les réflexions, c'est-à-dire les symétries orthogonales par rapport à un hyperplan de E.

I. Étude des réflexions

1. *Expression analytique d'une réflexion.*

a. Soit v un vecteur non nul orthogonal à un hyperplan H de E. Montrer que, pour tout élément x de E,

$$(1) \qquad s_H(x) = x - \frac{2}{\|v\|^2} < v, x > v.$$

b. Prouver que s_H est un automorphisme orthogonal de E.

c. Montrer que la matrice S_H de s_H dans la base $\mathcal{B}$ vérifie :

$$S_H = I - \frac{2}{\|v\|^2} V {}^tV,$$

où V est la matrice colonne associée au vecteur v dans la base $\mathcal{B}$, ${}^tV$ la transposée de V et I la matrice unité.

2. *Réflexion échangeant deux vecteurs.*

a. Soient a et b des vecteurs non nuls de E, distincts et tels que $\| a \| = \| b \|$. Montrer qu'il existe une réflexion s et une seule de E telle que $s(a) = b$, à savoir la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à $a - b$.

b. Soient maintenant e un vecteur unitaire de E et a un vecteur non nul de E. On pose :

$$\alpha = < e, a > \quad \text{et} \quad \sigma = \varepsilon \| a \|, \quad \text{où} \quad \varepsilon = 1 \ \text{si} \ \alpha \geqslant 0 \ \text{et} \ \varepsilon = -1 \ \text{sinon.}$$

Prouver que le vecteur $v = a + \sigma e$ n'est pas nul, et que $\| v \|^2 \geqslant 2 \| a \|^2$. Caractériser les cas d'égalité dans cette inégalité.

Établir qu'il existe une réflexion et une seule, notée $s_{a,e}$, telle que $s_{a,e}(a) = -\sigma e$ et prouver que, pour tout élément x de E,

$$(2) \qquad s_{a,e}(x) = x - \tau < v, x > v, \qquad \text{où} \quad \tau = \frac{1}{\sigma(\sigma + \alpha)}.$$

Ces notations sont conservées dans toute la suite du problème.

c. On suppose que $e = e_1$ et on décompose a dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme $a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$. Expliciter un algorithme fournissant σ et les composantes v_j du vecteur v.
Expliciter un algorithme fournissant les composantes y_j de $y = s_{a,e}(x)$ en fonction des composantes x_j de x.

Tournez la page S. V. P.

II. Application à la résolution des systèmes de Cramer

1. *Support théorique de la méthode.*

Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k < n$, on note E_k le sous-espace de E engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_k$ et F_{k+1} le sous-espace de E engendré par $e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n$. Soient f un automorphisme de E et A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

a. Prouver que $a_1 = f(e_1)$ est non nul. On pose $s_1 = s_{a_1, e_1}$ et $f_1 = s_1 \circ f$. Prouver que E_1 est stable par f_1 et que f_1 est un automorphisme de E. Indiquer la forme de la matrice A_1 associée à f_1 dans la base $\mathcal{B}$.

b. Prouver que la projection orthogonale a_2 de $f_1(e_2)$ sur F_2 est non nulle. On pose $s_2 = s_{a_2, e_2}$ et $f_2 = s_2 \circ f_1$. Prouver que tout élément x de E_1 est fixé par s_2. Montrer que E_1 et E_2 sont stables par f_2 et que f_2 est un automorphisme de E. Indiquer la forme de la matrice A_2 associée à f_2 dans la base $\mathcal{B}$.

c. Construire une suite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de vecteurs non nuls de E, une suite $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de réflexions de E et une suite $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ d'automorphismes de E satisfaisant aux conditions suivantes :

$$a_1 = f(e_1), \qquad s_1 = s_{a_1, e_1} \quad \text{et} \quad f_1 = s_1 \circ f;$$

pour $2 \leqslant k \leqslant n$, a_k est en projection orthogonale de $f_{k-1}(e_k)$ sur F_k, $s_k = s_{a_k, e_k}$ et $f_k = s_k \circ f_{k-1}$;
pour $1 \leqslant k \leqslant n$, f_k stabilise les sous-espaces $E_1, E_2, \ldots, E_k$.
Indiquer la forme de la matrice A_k associée à f_k dans la base $\mathcal{B}$.

d. On pose $q = s_n \circ s_{n-1} \circ \ldots \circ s_1$. Prouver que q est un automorphisme orthogonal et que la matrice de $q \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.

2. *Étude de l'algorithme.*

Soient Q la matrice associée à q dans la base $\mathcal{B}$, b et x des vecteurs de E, B et X les matrices colonnes associées dans cette base. Dans ces conditions X est solution du système AX = B si et seulement si X est solution du système triangulaire QAX = QB, facile à résoudre. On se propose de décrire un algorithme permettant de calculer QA et QB. Pour cela, on pose :

$$A_0 = A, \qquad B_0 = B$$

puis, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $A_k = S_k A_{k-1}$, $B_k = S_k B_{k-1}$, où S_k est la matrice associée à la réflexion s_k dans la base $\mathcal{B}$.

a. Indiquer les composantes de B_k qui sont nécessairement égales à celles de B_{k-1}, puis les composantes des vecteurs colonnes de A_k qui sont nécessairement égales à celles des vecteurs colonnes correspondants de A_{k-1}.

b. À l'aide des résultats obtenus en I.2, expliciter de façon détaillée un algorithme permettant de calculer A_k et B_k en fonction de A_{k-1} et B_{k-1}.
Déterminer le nombre d'extractions de racines carrées, de divisions, de multiplications et d'additions (ou de soustractions) utilisées pour exécuter cet algorithme.

c. En déduire un ordre de grandeur du nombre de telles opérations utilisées pour obtenir $A_n = QA$ et $B_n = QB$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail